

La révision du taux d'actualisation
Avis et recommandations du Comité d'experts sur le calcul socioéconomique des investissements publics
1^{er} juillet 2021

Annexe 1
Document technique
Le cadre théorique, le processus de calcul et les résultats

Note justificative¹

Joël MAURICE, 26 août 2021

Introduction

La présente Note Justificative m'a été demandée par le Comité d'experts lors de sa réunion du 24 juin 2021, en vue de retracer les simulations que j'ai effectuées dans le cadre des travaux de ce Comité relatifs à la révision du taux d'actualisation.

Elle vise à fournir des justifications détaillées, quitte à être longues et à reprendre certaines démonstrations classiques, que le lecteur pourra le cas échéant estimer superflues.

Elle comprend deux parties.

- La partie 1 concerne le cadre théorique. Elle développe le résumé que constitue le paragraphe 1.1 de l'Annexe 1 « Document technique » mentionné dans l'en-tête ci-dessus.
- La partie 2 concerne le processus de calcul. Elle développe le résumé que constituent les paragraphes 1.2, 1.3 et 1.4 de ladite Annexe 1 « Document technique ».

Elle se termine par un tableau synoptique des Variantes simulées.

Elle est accompagnée pour chacune de ces Variantes d'une fiche qui donne sur un premier feuillet le détail du calcul Excel et sur un second feuillet les figures représentatives de ces calculs. La partie 2 sert de notice d'utilisation du fichier Excel, qu'il est possible d'utiliser si l'on souhaite simuler d'autres Variantes.

Des travaux ultérieurs seraient nécessaires pour examiner le cas échéant des hypothèses alternatives et/ou pour fonder plus solidement certaines bases et notamment l'interprétation de la série historique du PIB par tête.

Enfin, cette Note se limite à l'horizon 2070. Elle ne traite pas de la révision du taux d'actualisation au-delà de cette date.

¹ La présente Note justificative est annoncée par les documents cités en tête.

Je suis extrêmement redevable à Roger Guesnerie, qui m'a prodigué ses remarques et conseils de bout en bout, ainsi qu'à Ni Jincheng qui m'a beaucoup aidé, à Jean-Paul Ourliac pour son art de la synthèse, à Michel Massoni, Jean-Paul Nicolai et à tous les membres du Comité, et bien sûr à Christian Gollier et Emile Quinet. Je reste seul responsable des erreurs qui peuvent subsister dans cette Note.

1. Le cadre théorique

1.1. Formulations de la « valeur actuelle nette socioéconomique » VAN SE et du taux d'actualisation

ρ_t

Référence : Note Gollier-Guesnerie de juillet 2017 « Discussion sur l'actualisation : un arrière-plan analytique ».

Introduction

La VAN SE du projet estime la variation de l'espérance mathématique de l'utilité collective intertemporelle monétarisée qu'il suscite pendant toute sa durée de vie. Le taux d'actualisation s'applique à l'espérance mathématique de l'avantage annuel net du projet. Tous les flux monétarisés s'expriment en euros de l'année d'actualisation².

Espérance mathématique de l'utilité collective intertemporelle monétarisée « hors projet ».

Elle est supposée de la forme :

$$W = \left[\sum_{t=0}^{t=+\infty} e^{-\delta \cdot t} \cdot P_t \cdot EU(C_t) \right] / U'(C_0) \quad (101)$$

où :

t est l'année, comptée à partir de la date d'actualisation prise comme 0

δ est le taux de préférence³ pour le présent

P_t est la population l'année t

E est l'opérateur « espérance mathématique »

C_t est la consommation⁴ par tête⁵ l'année t

$U(C_t)$ est le niveau de satisfaction (ou « utilité ») ressentie l'année t par le consommateur

$U'(C_0)$ est l'utilité marginale du consommateur, à la marge⁶ de sa sommation de l'année 0

On substitue dans ce qui suit le PIB⁷ par tête Y_t à la consommation par tête C_t :

$$W = \left[\sum_{t=0}^{t=+\infty} e^{-\delta \cdot t} \cdot P_t \cdot EU(Y_t) \right] / U'(Y_0) \quad (102)$$

Espérance mathématique de l'utilité collective intertemporelle monétarisée « avec projet ».

Prenons en compte le projet, dont l'avantage net⁸ de l'année t est A_t . Supposons A_t réparti à égalité⁹ entre les P_t consommateurs. L'espérance de l'utilité collective intertemporelle monétarisée « avec projet » est alors de la forme :

$$W_{avec} = \left[\sum_{t=0}^{t=+\infty} e^{-\delta \cdot t} \cdot P_t \cdot EU\left(Y_t + \frac{A_t}{P_t}\right) \right] / U'(Y_0) \quad (103)$$

² Voir le « Guide de l'évaluation socioéconomique des investissements publics » (décembre 2017), Trésor Direction générale et France Stratégie, page 33 : « l'année d'actualisation est fixée à 2015 par le comité d'experts pour les évaluations socioéconomiques réalisées entre 2017 et 2022 ».

Le déflateur

³ Taux supposé constant au cours du temps.

⁴ En euros de l'année 0 : déflateur, prix du PIB.

⁵ Tous les consommateurs P_t de l'année t sont supposés consommer la même quantité C_t .

⁶ Sous l'effet supposé de la consommation d'un euro supplémentaire, l'année 0.

⁷ En euros de l'année 0 : déflateur, prix du PIB.

⁸ Flux annuel net des bénéfices moins les coûts, l'année t , les uns et les autres exprimés en euros de l'année d'actualisation : déflateur, prix du PIB.

⁹ Voir Ch. Gollier (2007) « Actualisation ; prise en compte du temps dans un environnement risqué », dans « Le Calcul économique » (ouvrage collectif sous la direction de J. Maurice et Y. Crozet), page 114.

« Valeur actuelle nette socioéconomique » VAN SE du projet.

Par définition, elle est égale à la variation de l'espérance mathématique de l'utilité collective intertemporelle monétarisée que le projet suscite pendant toute sa durée de vie. Elle s'obtient en soustrayant (102) à (103) :

$$VAN SE = W_{avec} - W = \left[\sum_{t=0}^{t=+\infty} e^{-\delta \cdot t} \cdot P_t \cdot \left\{ EU(Y_t + \frac{A_t}{P_t}) - EU(Y_t) \right\} \right] / U'(Y_0) \quad (104)$$

Supposons A_t très petit par rapport au PIB, donc $\frac{A_t}{P_t}$ très petit devant le PIB par tête Y_t . Prenons le développement limité à l'ordre 1 :

$$P_t \cdot \left\{ EU(Y_t + \frac{A_t}{P_t}) - EU(Y_t) \right\} \cong P_t \cdot E \left[\frac{A_t}{P_t} \cdot U'(Y_t) \right] = E[A_t \cdot U'(Y_t)] \quad (105)$$

Dès lors (104) devient :

$$VAN SE = \left[\sum_{t=0}^{t=+\infty} e^{-\delta \cdot t} \cdot E[A_t \cdot U'(Y_t)] \right] / U'(Y_0)$$

qui peut s'écrire :

$$VAN SE = \sum_{t=0}^{t=+\infty} e^{-\delta \cdot t} \cdot E \left[A_t \cdot \frac{U'(Y_t)}{U'(Y_0)} \right] \quad (106)$$

Taux d'actualisation ρ_t

Il s'applique à l'espérance mathématique de l'avantage annuel net du projet. Par définition¹⁰, il est tel que :

$$VAN SE = \sum_{t=0}^{t=+\infty} e^{-\rho_t \cdot t} \cdot EA_t \quad (107)$$

Expression du taux d'actualisation ρ_t

De (106) et (107) on tire l'égalité :

$$\sum_{t=0}^{t=+\infty} e^{-\rho_t \cdot t} \cdot EA_t = \sum_{t=0}^{t=+\infty} e^{-\delta \cdot t} \cdot E \left[A_t \cdot \frac{U'(Y_t)}{U'(Y_0)} \right] \quad (108)$$

Identifions la relation (108) membre à membre selon t :

$$e^{-\rho_t \cdot t} \cdot EA_t = e^{-\delta \cdot t} \cdot E \left[A_t \cdot \frac{U'(Y_t)}{U'(Y_0)} \right] \quad (109)$$

ou, en prenant le logarithme :

$$-\rho_t \cdot t + \ln EA_t = -\delta \cdot t + \ln E \left[A_t \cdot \frac{U'(Y_t)}{U'(Y_0)} \right] \quad (109)$$

D'où l'expression du taux d'actualisation ρ_t applicable à l'avantage annuel net A_t de l'année t :

$$\rho_t = \delta - \frac{1}{t} \cdot \ln E \left[A_t \cdot \frac{U'(Y_t)}{U'(Y_0)} \right] + \frac{1}{t} \cdot \ln EA_t \quad (110)$$

Supposons maintenant que la fonction d'utilité instantanée est de la forme¹¹ :

$$U(Y_t) = \frac{Y_t^{1-\gamma} - 1}{1-\gamma} \quad \text{qui tend vers } U(Y_t) = \ln Y_t \text{ si } \gamma \text{ tend vers } 1 \quad (111)$$

γ est l'aversion au risque¹².

¹⁰ Voir Note Gollier-Guesnerie précitée.

¹¹ D'autres formes de la fonction d'utilité sont possibles ; voir notamment Epstein L.G et S.E. Zin (1989) « Substitution, risk aversion and the temporal behavior of consumption and assets returns ; A theoretical framework », Econométrica, vol 57, N°4.

¹² Supposée constante au cours du temps.

$$(111) \text{ implique : } U'(Y_t) = Y_t^{-\gamma} \quad \text{et notamment } U'(Y_0) = Y_0^{-\gamma} \quad (112)$$

La VAN SE (106) s'écrit dès lors :

$$VAN SE = \sum_{t=0}^{+\infty} e^{-\delta \cdot t} \cdot E \left[A_t \cdot \left(\frac{Y_t}{Y_0} \right)^{-\gamma} \right] \quad (113)$$

Le taux d'actualisation ρ_t (110) devient :

$$\rho_t = \delta - \frac{1}{t} \cdot \ln E \left[A_t \cdot \left(\frac{Y_t}{Y_0} \right)^{-\gamma} \right] + \frac{1}{t} \cdot \ln EA_t \quad (114)$$

Supposons ensuite que l'avantage annuel net A_t de l'année t dépend du PIB par tête Y_t de l'année t , selon la relation :

$$A_t = \bar{A}_t \cdot \left(\frac{Y_t}{Y_0} \right)^{\beta_t} \quad (115)$$

où :

\bar{A}_t est un facteur d'échelle

β_t est l'élasticité de A_t par rapport à Y_t ; elle dépend du contenu¹³ de A_t

On reviendra plus loin sur les risques propres au projet (c'est-à-dire indépendants de Y_t). Compte tenu de (115), (113) devient :

$$VAN SE = \sum_{t=0}^{+\infty} e^{-\delta \cdot t} \cdot \bar{A}_t \cdot E \left[\left(\frac{Y_t}{Y_0} \right)^{\beta_t - \gamma} \right] \quad (116)$$

Le taux d'actualisation (114) devient :

$$\rho_t = \delta - \frac{1}{t} \cdot \ln E \left[\bar{A}_t \cdot \left(\frac{Y_t}{Y_0} \right)^{\beta_t - \gamma} \right] + \frac{1}{t} \cdot \ln E \left[\bar{A}_t \cdot \left(\frac{Y_t}{Y_0} \right)^{\beta_t} \right] \quad (117)$$

qui se simplifie¹⁴ en :

$$\rho_t = \delta - \frac{1}{t} \cdot \ln E \left(\frac{Y_t}{Y_0} \right)^{\beta_t - \gamma} + \frac{1}{t} \cdot \ln E \left(\frac{Y_t}{Y_0} \right)^{\beta_t} \quad (118)$$

Loi de probabilité de l'évolution temporelle du PIB¹⁵ par tête Y_t

Considérons la variable aléatoire annuelle $z_t = \ln \frac{Y_t}{Y_{t-1}}$, autrement dit :

$$z_t = \ln(1 + g_t) \quad \text{où } g_t \text{ est le taux de croissance annuel de } Y_t. \quad (119)$$

Dès lors :

$$\frac{Y_t}{Y_0} = e^{\sum_{u=1}^{u=t} z_u} \quad (120)$$

(116) donne :

$$VAN SE = \sum_{t=0}^{+\infty} e^{-\delta \cdot t} \cdot \bar{A}_t \cdot E \left[e^{(\beta_t - \gamma) \cdot \sum_{u=1}^{u=t} z_u} \right]$$

Autrement dit :

$$VAN SE = \sum_{t=0}^{+\infty} e^{-\delta \cdot t} \cdot \bar{A}_t \cdot E \left[\prod_{u=1}^{u=t} e^{(\beta_t - \gamma) \cdot z_u} \right] \quad (121)$$

(118) donne de même :

$$\rho_t = \delta - \frac{1}{t} \cdot \ln E \left[\prod_{u=1}^{u=t} e^{(\beta_t - \gamma) \cdot z_u} \right] + \frac{1}{t} \cdot \ln E \left[\prod_{u=1}^{u=t} e^{\beta_t \cdot z_u} \right] \quad (122)$$

¹³ Par exemple : investissement, fonctionnement, etc.

¹⁴ Le facteur d'échelle \bar{A}_t s'élimine.

¹⁵ Toujours exprimé en euros de l'année d'actualisation : déflateur, prix du PIB.

Supposons de plus que, lorsque t varie, les variables z_t sont indépendantes. L'espérance du produit est alors égale au produit des espérances.

(121) donne :

$$VAN SE = \sum_{t=0}^{t=+\infty} e^{-\delta.t} . \bar{A}_t . \left[\prod_{u=1}^{u=t} E e^{(\beta_t - \gamma).z_u} \right] \quad (123)$$

(122) donne :

$$\rho_t = \delta - \frac{1}{t} . \ln \left[\prod_{u=1}^{u=t} E e^{(\beta_t - \gamma).z_u} \right] + \frac{1}{t} . \ln \left[\prod_{u=1}^{u=t} E e^{\beta_t.z_u} \right] \quad (124)$$

Supposons enfin que les variables aléatoires indépendantes z_t sont identiquement distribuées, de type Z .

(123) donne :

$$VAN SE = \sum_{t=0}^{t=+\infty} e^{-\delta.t} . \bar{A}_t . \left[E e^{(\beta_t - \gamma).z} \right]^t \quad (125)$$

(124) donne :

$$\rho_t = \delta - \frac{1}{t} . \ln \left[E e^{(\beta_t - \gamma).z} \right]^t + \frac{1}{t} . \ln \left[E e^{\beta_t.z} \right]^t \quad (126)$$

Dans l'hypothèse considérée où les taux de croissance du PIB par tête sont des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées (*iid*), il apparaît alors possible de mettre les résultats susmentionnés sous des formes nettement simplifiées.

Ainsi, le taux d'actualisation (126) peut s'écrire sous la forme :

$$\rho_t = \delta - \ln E e^{(\beta_t - \gamma).z} + \ln E e^{\beta_t.z} \quad (127)$$

Composante $VAN SE (A_t)$ propre à l'avantage annuel A_t de l'année t :

$$\text{Appelons } VAN SE (A_t) = e^{-\delta.t} . \bar{A}_t . \left[E e^{(\beta_t - \gamma).z} \right]^t \quad (128.1)$$

$$\text{De sorte que } VAN SE = \sum_{t=0}^{t=+\infty} VAN SE (A_t) \quad (128.2)$$

Notations simplificatrices

Nous proposons d'adopter la notation simplificatrice suivante :

$$VAN SE (A_t) = e^{-\delta.t} . \bar{A}_t . e^{-\tau_t.t} \quad \text{avec : } \tau_t = - \ln E e^{(\beta_t - \gamma).z} \quad (129)$$

Nous proposons aussi de mettre l'espérance mathématique de l'avantage annuel A_t sous la forme,

$$E A_t = \bar{A}_t . e^{\nu_t.t} \quad \text{avec : } \nu_t = \ln E e^{\beta_t.z} \quad (130)$$

Interprétation :

- le taux ν_t peut s'interpréter comme le "taux d'évolution de l'espérance mathématique de l'avantage annuel net A_t " du projet, sous l'influence de l'élasticité β_t par rapport au PIB par tête ;
- le taux τ_t peut s'interpréter comme le "taux global¹⁶ d'évolution de la composante $VAN SE (A_t)$ de la valeur ajoutée" du projet ou, plus succinctement "taux global d'actualisation", sous l'influence de l'élasticité β_t par rapport au PIB par tête. Ce taux englobe les deux effets sur $VAN SE (A_t)$ dus aux aléas sur le PIB par tête : l'effet qui transite par le

¹⁶ "Overall" : Voir Dietz S., Ch, Gollier et L. Kessler (2017) « The climate beta », Journal of environmental Economics and Management, page 261et sq.

taux d'actualisation et celui qui transite par l'espérance mathématique de l'avantage annuel net du projet.

Avec ces notations, on a l'identité :

$$\rho_t = \delta + \tau_t + \nu_t \quad (131)$$

Cas d'existence de "risques propres"

Si le projet comporte en outre des "risques propres", indépendants de Y_t , ils sont justiciables des relations ci-dessus pour lesquelles on aurait $\beta_t = 0$.

On aurait alors :

$$\nu_t = 0 \text{ et } \tau_t = \delta - \ln Ee^{-\gamma z} \quad (132)$$

Cette part des avantages exposée aux risques propres serait à actualiser en appliquant le taux dit "sans risque (macroéconomique¹⁷) r_{ft} " ainsi donné par :

$$r_{ft} = \delta - \ln Ee^{-\gamma z} \quad (133)$$

Cas particulier $\beta_t = \gamma$

$$\text{On a alors } \tau_t = 0, \text{ et par conséquent } \rho_t = \delta + \nu_t \text{ où } \nu_t = \ln Ee^{\gamma z} \quad (134)$$

Sur la base des hypothèses introduites successivement ci-dessus, il est possible de déterminer les inconnues recherchées, à condition de disposer de la loi de probabilité de la variable aléatoire z .

Il est alors pratique de déterminer séparément les deux taux τ_t et ν_t , puis le taux d'actualisation comme étant leur somme, augmentée de δ .

Omission de l'indice du temps t

Compte-tenu notamment du fait que les variables aléatoires z_t sont supposées indépendantes et identiquement distribuées, le taux d'actualisation ρ_t ainsi que ses composantes τ_t et ν_t ne dépendent plus du temps t qu'à travers l'élasticité β_t de l'avantage annuel net A_t par rapport au PIB réel par tête Y_t .

Pour simplifier les notations dans ce qui suit, on va passer sous silence l'indice du temps t . Mais il ne faut pas oublier que, chaque année t , l'élasticité β doit en principe être appropriée au contenu de l'avantage annuel net A_t .

1.2. Loi de probabilité de l'évolution du PIB réel par tête

Supposons connue la loi de probabilité de la variable aléatoire z .

$$\text{Appelons sa densité de probabilité } f(z) \quad (201)$$

$$\text{Soit } w \text{ un scalaire, auquel on pourra par la suite donner par exemple les valeurs } \beta, \beta - \gamma, -\gamma. \quad (202)$$

Posons :

$$j(w) = Ee^{wz} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{wz} \cdot f(z) \cdot dz \quad (202)$$

$$h(w) = \ln Ee^{wz} = \ln j(w) = \ln \int_{-\infty}^{+\infty} e^{wz} \cdot f(z) \cdot dz \quad (203)$$

¹⁷ Le qualificatif « macroéconomique » est la plupart du temps passé sous silence.

Transcription (en passant sous silence l'indice du temps t) :

- La relation (129) $\tau = -\ln Ee^{(\beta-\gamma)z}$ se transcrit en donnant au scalaire w la valeur $(\beta - \gamma)$:

$$\tau = -h((\beta - \gamma)) \quad (204.1)$$

- La relation (130) $\nu = \ln Ee^{\beta z}$ se transcrit en donnant au scalaire w la valeur (β) :

$$\nu = h(\beta) \quad (204.2)$$

- La relation (131) s'écrit :

$$\rho = \delta + \tau + \nu \quad (204.3)$$

La fonction $j(w)$ est appelée fonction génératrice des moments non centrés de la variable aléatoire z . On peut en effet développer (202) sous la forme :

$$j(w) = E(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{w^n}{n!} \cdot z^n) = \int_{-\infty}^{+\infty} (1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{w^n}{n!} \cdot z^n) \cdot f(z) \cdot dz \quad (205.1)$$

Par définition, le moment non centré¹⁸ m_n d'ordre¹⁹ n de z est :

$$m_n = Ez^n = \int_{-\infty}^{+\infty} z^n \cdot f(z) \cdot dz \quad (205.2)$$

(202) s'écrit alors :

$$j(w) = E(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{w^n}{n!} \cdot m_n) \quad (205.3)$$

...sous réserve de l'existence de tous les moments non centrés et de la convergence de la série.

Sous cette réserve, $j(0) = 1$ et $m_n = \left[\frac{d^n j(w)}{dw^n} \right]_{w=0}$, dérivée d'ordre n pour $w = 0$. (205.4)

(206.3) est alors le développement de Maclaurin de la fonction $j(w)$.

Le moment non centré d'ordre 1 est l'espérance mathématique²⁰ : $m_1 = Ez$ (206.1)

Par définition, le moment centré d'ordre n de z est : $mc_n = E(z - m_1)^n$ (206.2)

Variance²¹ de z ; c'est son moment centré d'ordre 2 : $mc_2 = E(z - m_1)^2$ (206.3)

On montre²² que $mc_2 = m_2 - m_1^2$ (206.4)

La fonction $h(w)$ est appelée fonction génératrice des cumulants de la variable z .

Par définition, les cumulants k_n sont tels que :

$$h(w) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w^n}{n!} \cdot k_n \quad (207.1)$$

...sous réserve de l'existence de tous les cumulants et de la convergence de la série.

Sous cette réserve, $h(0) = 0$ et $k_n = \left[\frac{d^n h(w)}{dw^n} \right]_{w=0}$, dérivée d'ordre n pour $w=0$. (207.1) est alors le développement de Maclaurin de la fonction $h(w)$ (207.2)

¹⁸ Si ce moment existe ; pour certaines lois de probabilité, les moments n'existent pas tous, voire il n'en existe aucun (loi de probabilité de Cauchy). On ne répètera pas systématiquement cette réserve par la suite.

¹⁹ n entier

²⁰ Aussi couramment notée μ

²¹ Aussi couramment notée σ^2

²² **Preuve** : $E(z - m_1)^2 = E(z^2 - 2 \cdot m_1 \cdot z + m_1^2) = Ez^2 - 2 \cdot m_1 \cdot Ez + m_1^2 = m_2 - m_1^2$

Relation entre (s'ils existent) les cumulants et les moments non centrés :

$$(203) \text{ et } (205.3) \text{ impliquent : } h(w) = \ln E e^{w.z} = \ln \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w^n}{n!} \cdot m_n \right] \quad (208.1)$$

Développons (208.1) en série²³ :

$$h(w) = \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{w^n}{n!} \cdot m_n \right] - \frac{1}{2} \cdot \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{w^n}{n!} \cdot m_n \right]^2 + \frac{1}{3} \cdot \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{w^n}{n!} \cdot m_n \right]^3 - \dots \quad (208.2)$$

En identifiant (207.1) et (208.2) terme à terme, on obtient notamment (en se limitant à l'ordre 4) :

$$k_1 = m_1 \quad k_1 \text{ est la moyenne (espérance mathématique) de } z \quad (209.1)$$

$$k_2 = m_2 - m_1^2 \quad k_2 \text{ est la variance de } z \quad (209.2)$$

$$k_3 = m_3 - 3 \cdot m_2 \cdot m_1 + 2 \cdot m_1^3 \quad (209.3)$$

$$k_4 = m_4 - 4 \cdot m_3 \cdot m_1 - 3 \cdot m_2^2 + 12 \cdot m_2 \cdot m_1^2 - 6 \cdot m_1^4 \quad (209.4)$$

Dans ce qui suit on utilise généralement la notation des cumulants, qui permet le cas échéant de dépasser l'ordre 2.

Supposons désormais que la variable aléatoire z est la somme de deux variables aléatoires za et zb indépendants²⁴ : $z = za + zb$ (210)

Cette hypothèse est reprise du rapport Gollier²⁵ (2011) et du rapport E. Quinet²⁶ (2013), qui se réfèrent l'un et l'autre aux travaux de Barro²⁷ (2006), sur lequel on reviendra plus loin.

Examinons d'abord les propriétés générales de la somme $z = za + zb$, avant de spécifier et d'analyser successivement la loi de probabilité de za et celle de zb .

Propriétés générales de z en tant que somme de deux variables aléatoires indépendantes za et zb

La fonction génératrice des cumulants de la somme z est la somme des fonctions génératrice des cumulants respectivement de za et de zb

$$h(z) = h(za) + h(zb) \text{ autrement-dit : } \ln E e^{w.z} = \ln E e^{w.za} + \ln E e^{w.zb} \quad (211)$$

Preuve

$$\ln E e^{w.z} = \ln E e^{w.(za+zb)} = \ln E (e^{w.za} \cdot e^{w.zb}) \quad (212.1)$$

Les deux variables za et zb étant supposées indépendantes :

$$E(e^{w.za} \cdot e^{w.zb}) = E e^{w.za} \cdot E e^{w.zb} \quad (212.2)$$

Dès lors, $\ln(E e^{w.za} \cdot E e^{w.zb}) = \ln E e^{w.za} + \ln E e^{w.zb}$, ce qui démontre (211).

De (211) découlent les conséquences suivantes.

Le cumulants d'ordre n de z est la somme des cumulants d'ordre n (s'ils existent) de za et zb .

(211) s'écrit en effet :

²³ Suppose $\left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w^n}{n!} \cdot m_n \right| < 1$

²⁴ Les variables aléatoires annuelles za_t sont supposées iid de type za ; les variables aléatoires annuelles zb_t sont supposées iid de type zb ; dès lors, les variables aléatoires annuelles $z_t = za_t + zb_t$ sont iid de type $z = za + zb$.

²⁵ Gollier Christian. (2011) « Le calcul du risque dans les investissements publics », La documentation Française, page 90.

²⁶ Quinet Emile (2013) « Evaluation socioéconomique des investissements publics », Commissariat général à la stratégie et à la prospective, page 71.

²⁷ Barro Robert J. (2006) "Rare disasters and asset markets in the twentieth century", The Quarter Journal of Economics 121, no. 3: 823-866.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{w^n}{n!} \cdot k_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w^n}{n!} \cdot ka_n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w^n}{n!} \cdot kb_n$$

autrement dit : $k_n = ka_n + kb_n$ (213.1)

En particulier :

- la moyenne (espérance mathématique) de z est la somme des moyennes (espérances mathématiques) de za et zb :

$$k_1 = ka_1 + kb_2 \quad (213.2)$$

- la variance de z est la somme des variances de za et zb :

$$k_2 = ka_2 + kb_2 \quad (213.3)$$

Le taux d'actualisation dû à la somme s'obtient en calculant successivement (pour chaque valeur de la variable β , ici mise en évidence) :

$$\tau_{a+b}(\beta) = \tau a(\beta) + \tau b(\beta) \quad (214.1)$$

$$v_{a+b}(\beta) = v a(\beta) + v b(\beta) \quad (214.2)$$

$$\rho_{a+b}(\beta) = \delta + \tau_{a+b}(\beta) + v_{a+b}(\beta) \quad (214.3)$$

Preuve de (214.1) : il suffit dans (211) de donner au paramètre w la valeur $(\beta - \gamma)$

Preuve de (214.2) : il suffit dans (211) de donner au paramètre w la valeur β

(214.3) est alors la transcription de l'identité (204.3).

Expressions équivalentes :

$$\rho_{a+b}(\beta) = \delta + \rho a(\beta) + \rho b(\beta) \text{ dans laquelle :} \quad (214.4)$$

$$\rho a(\beta) = \tau a(\beta) + v a(\beta) \text{ est la composante de } \rho_{a+b}(\beta) \text{ due à } za \quad (214.5)$$

$$\rho b(\beta) = \tau b(\beta) + v b(\beta) \text{ est la composante de } \rho_{a+b}(\beta) \text{ due à } zb \quad (214.6)$$

Caractérisation des lois de probabilités respectives de za et zb .

Selon²⁸ Barro (2006) :

za est supposée gaussienne (loi normale) : (215.1)

zb est censée représenter l'occurrence de désastres rares ; elle est non gaussienne ; elle prend avec la probabilité $(1 - p)$ la valeur 0 et avec la probabilité p la valeur : $-\varepsilon = \ln(1 - b)$, b étant le taux « désastreux » de chute²⁹ du PIB réel par tête Y_t . (215.2)

Analyse de la loi de za , supposée gaussienne

Notons ka_1 l'espérance mathématique de za et ka_2 sa variance. (216)

La densité de probabilité de za est (loi normale) :

$$fa(za) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi \cdot ka_2)}} e^{-\frac{(za-ka_1)^2}{2 ka_2}} \quad (217.1)$$

Remarque :

$$\text{l'intégrale } \int_{-\infty}^{+\infty} fa(za) \cdot dza = \frac{1}{\sqrt{(2\pi \cdot ka_2)}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(za-ka_1)^2}{2 ka_2}} \cdot dza \text{ vaut } \mathbf{1} \quad (217.2)$$

Formulation de la fonction génératrice des moments non centrés :

$$ja(w) = E e^{w \cdot za} \quad (218.1)$$

$$E e^{w \cdot za} = \frac{1}{\sqrt{(2\pi \cdot ka_2)}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{w \cdot za} \cdot e^{-\frac{(za-ka_1)^2}{2 ka_2}} \cdot dza = \frac{1}{\sqrt{(2\pi \cdot ka_2)}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(za-ka_1)^2}{2 ka_2} + w \cdot za} \cdot dza \quad (218.2)$$

$$\text{Selon un résultat standard, } E e^{w \cdot za} = e^{w \cdot ka_1 + \frac{w^2}{2} \cdot ka_2} \quad (218.3)$$

²⁸ Susmentionné.

²⁹ b est la valeur absolue de la chute : c'est un nombre positif (et inférieur 1).

Preuve :

$$-\frac{(za-ka_1)^2}{2ka_2} + w.za = -\frac{(za-ka_1)^2 - 2.za.w.ka_2}{2ka_2} = -\frac{(za-(ka_1+w.ka_2))^2 - (ka_1+w.ka_2)^2 + ka_1^2}{2ka_2}$$

$$= -\frac{(za-(ka_1+w.ka_2))^2 - (2.w.ka_1.ka_2 + w^2.ka_2^2)}{2ka_2} = -\frac{(za-(ka_1+w.ka_2))^2}{2ka_2} + w.ka_1 + \frac{w^2}{2}.ka_2$$

Dès lors (218.2) s'écrit :

$$Ee^{w.za} = e^{w.ka_1 + \frac{w^2}{2}.ka_2} \cdot \frac{1}{\sqrt{(2\pi.ka_2)}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(za-(ka_1+w.ka_2))^2}{2ka_2}} \cdot dza$$

$$\text{Or}^{30} \frac{1}{\sqrt{(2\pi.ka_2)}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(za-(ka_1+w.ka_2))^2}{2ka_2}} \cdot dza = 1 \quad \text{ce qui démontre (218.3)}$$

Formulation de la fonction génératrice des cumulants :

$$ha(w) = \ln Ee^{w.za} \quad (219)$$

En prenant le logarithme népérien de (218.3) il vient :

$$\ln Ee^{w.za} = w.ka_1 + \frac{w^2}{2}.ka_2 \quad (220)$$

Nota 1 : il est ainsi établi que, la loi de probabilité de za étant supposée gaussienne, tous ses cumulants sont nuls, à l'exception des deux premiers : le cumulante ka_1 (qui s'identifie à l'espérance mathématique) et le cumulante ka_2 (qui s'identifie à la variance).

Analyse de la loi de zb , supposée non gaussien

Barro³¹ (2011) développe les hypothèses ci-dessus relatives à la variable aléatoire zb .

$$\text{«We work with the transformed disaster size } \xi = 1/(1-b) \quad (221.1)$$

which is the ratio of normal to disaster consumption or GDP. The threshold for b , taken to be 0,095, translates into one for ξ of $\xi_0=1,105$. As b approaches 1, ξ approaches $+\infty$, a limiting property that accords with the usual setting for a power-law distribution. We start with a familiar, single power law, which specifies the density function as $f(\xi) = Q \cdot \xi^{-(\alpha+1)}$ for $\xi \geq \xi_0$, where $Q > 0$ and $\alpha > 0$. The condition that the density integrate to 1 from ξ_0 to $+\infty$ implies³²: $Q = \alpha \cdot \xi_0^\alpha$ ». (221.2)

Nota 2 : La *power-law distribution* de la variable ξ est aussi appelée, dans la présente Note justificative, loi de Pareto.

A cette variable ξ ci-dessus, substituons la variable aléatoire ε :

$$\varepsilon = -\ln(1-b), \text{ équivalent à } \xi = e^\varepsilon, \varepsilon \text{ variant de } \varepsilon_0 = \ln \xi_0 \text{ à } +\infty \quad (221.3)$$

$$(221.3) \text{ implique : } \frac{d\xi}{d\varepsilon} = e^\varepsilon \text{ et } Q = \alpha \cdot e^{\alpha \cdot \varepsilon_0} \quad (221.4)$$

La densité de probabilité de la variable aléatoire ε est alors³³ :

$$l(\varepsilon) = Q \cdot f(\xi(\varepsilon)) \cdot \frac{d\xi}{d\varepsilon} = Q \cdot e^{-(\alpha+1) \cdot \varepsilon} \cdot e^\varepsilon = Q \cdot e^{-\alpha \cdot \varepsilon} \quad (221.5)$$

La loi de probabilité de la variable aléatoire ε est ainsi apparentée à une loi de Pareto.

³⁰ Loi normale d'espérance mathématique $ka_1 + w.ka_2$ et de variance ka_2 .

³¹ Barro R.J. et Tao Jin (2011, février) «On the Size Distribution of Macroeconomic Disasters», Harvard University. Barro et alli examinent successivement l'hypothèse d'une loi de Pareto unique, et celle d'une loi de Pareto double. On s'en est à ce stade tenu à la première hypothèse.

Michel Massoni a complété l'analyse présentée ici en examinant le cas d'une loi de Pareto double.

³² En effet, on doit avoir $Q \cdot \int_{\xi_0}^{+\infty} \xi^{-(\alpha+1)} \cdot d\xi = 1$, c'est-à-dire $Q \cdot \left[-\frac{\xi^{-\alpha}}{\alpha} \right]_{\xi_0}^{+\infty} = 1$, ce qui donne : $Q = \alpha \cdot \xi_0^\alpha$

³³ On vérifie que $Q \cdot \int_{\varepsilon_0}^{+\infty} e^{-\alpha \cdot \varepsilon} \cdot d\varepsilon = Q \cdot \left[-\frac{e^{-\alpha \cdot \varepsilon}}{\alpha} \right]_{\varepsilon_0}^{+\infty} = Q \cdot \frac{e^{-\alpha \cdot \varepsilon_0}}{\alpha} = 1$, car $Q = \alpha \cdot \xi_0^\alpha = \alpha \cdot e^{\alpha \cdot \varepsilon_0}$

Formulation de la fonction génératrice des moments non centrés :

$$jb(w) = Ee^{w.zb} \quad (222.1)$$

En reprenant ici Barro (2011), la variable zb prend avec la probabilité p la valeur $(-\varepsilon)$ dont la loi de probabilité est donnée par (221.5) et avec la probabilité $(1-p)$ la valeur 0 (qui implique alors $e^{w.zb} = 1$).

Dès lors :

$$\begin{aligned} jb(w) &= Ee^{w.zb} = 1 - p + p \cdot Q \cdot \int_{\varepsilon_0}^{+\infty} e^{w \cdot (-\varepsilon)} \cdot e^{-\alpha \cdot \varepsilon} \cdot d\varepsilon \\ &= 1 - p + p \cdot Q \cdot \int_{\varepsilon_0}^{+\infty} e^{-(w+\alpha) \cdot \varepsilon} \cdot d\varepsilon \end{aligned} \quad (222.2)$$

$$\text{Supposons maintenant que } w + \alpha > 0 \Leftrightarrow w > -\alpha \quad (222.3)$$

(222.2) s'écrit alors, compte tenu de (221.5) :

$$jb(w) = Ee^{w.zb} = 1 - p + p \cdot \frac{\alpha}{w+\alpha} e^{-w \cdot \varepsilon_0} \quad (222.4)$$

Preuve :

$$jb(w) = Ee^{w.zb} = 1 - p + p \cdot Q \cdot \left[\frac{e^{-(w+\alpha) \cdot \varepsilon}}{-(w+\alpha)} \right]_{\varepsilon_0}^{+\infty} = 1 - p + p \cdot Q \cdot \frac{e^{-(w+\alpha) \cdot \varepsilon_0}}{w+\alpha} \quad (222.5)$$

Selon (221.5), $Q = \alpha \cdot e^{\alpha \cdot \varepsilon_0}$. En reportant dans (222.5), on obtient (222.4).

Formulation de la fonction génératrice des cumulants :

$$hb(w) = \ln jb(w) = \ln Ee^{w.zb} \quad (223.1)$$

Prenons le logarithme népérien de (222.4), toujours en supposant $w + \alpha > 0 \Leftrightarrow w > -\alpha$:

$$hb(w) = \ln Ee^{w.zb} = \ln(1 - p + p \cdot \frac{\alpha}{w+\alpha} e^{-w \cdot \varepsilon_0}) \quad (223.2)$$

Formulation des moments non centrés de la variable aléatoire zb

zb prenant avec la probabilité p la valeur $(-\varepsilon)$ dont la loi de probabilité est donnée par (221.5) et avec la probabilité $(1-p)$ la valeur 0 , son moment non centré d'ordre n est égal à :

$$mb_n = p \cdot Q \cdot \int_{\varepsilon_0}^{+\infty} (-\varepsilon)^n \cdot e^{-\alpha \cdot \varepsilon} \cdot d\varepsilon \quad (224)$$

On obtient les résultats suivants, en se limitant au moment d'ordre 4 :

$$mb_1 = -(\varepsilon_0 + \frac{1}{\alpha}) \cdot p \quad (225.1)$$

$$mb_2 = (\varepsilon_0^2 + 2 \cdot \frac{\varepsilon_0}{\alpha} + 2 \cdot \frac{1}{\alpha^2}) \cdot p \quad (225.2)$$

$$mb_3 = -(\varepsilon_0^3 + 3 \cdot \frac{\varepsilon_0^2}{\alpha} + 6 \cdot \frac{\varepsilon_0}{\alpha^2} + 6 \cdot \frac{1}{\alpha^3}) \cdot p \quad (225.3)$$

$$mb_4 = (\varepsilon_0^4 + 4 \cdot \frac{\varepsilon_0^3}{\alpha} + 12 \cdot \frac{\varepsilon_0^2}{\alpha^2} + 24 \cdot \frac{\varepsilon_0}{\alpha^3} + 24 \cdot \frac{1}{\alpha^4}) \cdot p \quad (225.4)$$

Preuve :

Montrons la formule de récurrence suivante :

$$mb_n = p \cdot (-\varepsilon_0)^n - \frac{n}{\alpha} \cdot mb_{n-1} \quad (226.1)$$

Intégration par parties :

$$p \cdot Q \cdot \int_{\varepsilon_0}^{+\infty} (-\varepsilon)^n \cdot e^{-\alpha \cdot \varepsilon} \cdot d\varepsilon = p \cdot Q \cdot \int_{\varepsilon_0}^{+\infty} (-\varepsilon)^n \cdot d \frac{e^{-\alpha \cdot \varepsilon}}{-\alpha} = p \cdot Q \cdot \left[(-\varepsilon)^n \cdot \frac{e^{-\alpha \cdot \varepsilon}}{-\alpha} \right]_{\varepsilon_0}^{+\infty} - p \cdot Q \cdot \int_{\varepsilon_0}^{+\infty} \frac{e^{-\alpha \cdot \varepsilon}}{-\alpha} \cdot d(-\varepsilon)^n \quad (226.2)$$

$$p \cdot Q \cdot \left[(-\varepsilon)^n \cdot \frac{e^{-\alpha \cdot \varepsilon}}{-\alpha} \right]_{\varepsilon_0}^{+\infty} = p \cdot Q \cdot (-\varepsilon_0)^n \cdot \frac{e^{-\alpha \cdot \varepsilon_0}}{-\alpha} = p \cdot (-\varepsilon_0)^n \text{ car (voir 221.4) } Q = \alpha \cdot e^{\alpha \cdot \varepsilon_0} \quad (226.3)$$

$$d(-\varepsilon)^n = n \cdot (-\varepsilon)^{n-1} \cdot (-1) \cdot d\varepsilon \text{ donc : } p \cdot Q \cdot \int_{\varepsilon_0}^{+\infty} \frac{e^{-\alpha \cdot \varepsilon}}{-\alpha} \cdot d(-\varepsilon)^n = \frac{n}{\alpha} \cdot p \cdot Q \cdot \int_{\varepsilon_0}^{+\infty} (-\varepsilon)^{n-1} \cdot e^{-\alpha \cdot \varepsilon} \cdot d\varepsilon \quad (226.4)$$

En reportant (226.3) et (226.4) dans (226.2) on obtient (226.1), car $p \cdot Q \cdot \int_{\varepsilon_0}^{+\infty} (-\varepsilon)^{n-1} \cdot e^{-\alpha \cdot \varepsilon} \cdot d\varepsilon = mb_{n-1}$

Remarque : les moments non centrés impairs sont négatifs ; les moments non centrés pairs sont positifs³⁴.

Cumulants de la variable aléatoire zb

Ils s'obtiennent en transposant les formules (209, 1 à 4) ci-dessus

$$kb_1 = mb_1 \quad kb_1 \text{ est la moyenne (espérance mathématique) de } zb \quad (227.1)$$

$$kb_2 = mb_2 - mb_1^2 \quad kb_2 \text{ est la variance de } zb \quad (227.2)$$

$$kb_3 = mb_3 - 3 \cdot mb_2 \cdot mb_1 + 2 \cdot mb_1^3 \quad (227.3)$$

$$kb_4 = mb_4 - 4 \cdot mb_3 \cdot mb_1 - 3 \cdot mb_2^2 + 12 \cdot mb_2 \cdot mb_1^2 - 6 \cdot mb_1^4 \quad (227.4)$$

Synthèse : taux d'actualisation de la variable z en tant que somme des deux variables aléatoires indépendants za gaussienne et zb « de Pareto »

Composante notée $\rho a(\beta)$ du taux d'actualisation relative à za , qui est supposée gaussienne,

$$\tau a(\beta) = -[(\beta - \gamma) \cdot ka_1 + \frac{(\beta - \gamma)^2}{2} \cdot ka_2] \quad (228.1)$$

$$v a(\beta) = \beta \cdot ka_1 + \frac{\beta^2}{2} \cdot ka_2 \quad (228.2)$$

$$\rho a(\beta) = \tau a(\beta) + v a(\beta) = (\gamma \cdot ka_1 - \frac{\gamma^2}{2} \cdot ka_2) + \beta \cdot (\gamma \cdot ka_2) \quad (228.3)$$

Nota 3 : $\rho a(\beta)$ est ainsi donnée par la relation standard, fonction de degré 1 en β
 $\tau a(\beta)$ et $v a(\beta)$ sont deux fonctions de degré 2 de β (ou « paraboliques »).

Composante notée $\rho b(\beta)$ du taux d'actualisation relative à zb , qui suit une loi de Pareto,

$$\tau b(\beta) = -\ln(1 - p + p \cdot \frac{\alpha}{\beta - \gamma + \alpha} \cdot e^{(\beta - \gamma) \cdot (-\varepsilon_0)}) \quad (229.1)$$

$$v b(\beta) = \ln(1 - p + p \cdot \frac{\alpha}{\beta + \alpha} \cdot e^{\beta \cdot (-\varepsilon_0)}) \quad (229.2)$$

$$\rho b(\beta) = -\ln\left(1 - p + p \cdot \frac{\alpha}{\beta - \gamma + \alpha} \cdot e^{(\beta - \gamma) \cdot (-\varepsilon_0)}\right) + \ln\left(1 - p + p \cdot \frac{\alpha}{\beta + \alpha} \cdot e^{\beta \cdot (-\varepsilon_0)}\right) \quad (229.3)$$

Contrairement à la composante $\rho a(\beta)$, la composante $\rho b(\beta)$ du taux d'actualisation $\rho_{a+b}(\beta)$ est non-linéaire en β .

Récapitulation : taux d'actualisation résultant $\rho_{a+b}(\beta)$

En utilisant (228.3) et (229.3), la relation (214.4) s'écrit : (230)

$$\rho_{a+b}(\beta) = \delta + \rho a(\beta) + \rho b(\beta)$$

avec

$$\rho a(\beta) = \left[\left(\gamma \cdot ka_1 - \frac{\gamma^2}{2} \cdot ka_2 \right) + \beta \cdot (\gamma \cdot ka_2) \right]$$

et

$$\rho b(\beta) = -\ln\left(1 - p + p \cdot \frac{\alpha}{\beta - \gamma + \alpha} \cdot e^{(\beta - \gamma) \cdot (-\varepsilon_0)}\right) + \ln\left(1 - p + p \cdot \frac{\alpha}{\beta + \alpha} \cdot e^{\beta \cdot (-\varepsilon_0)}\right)$$

2. Le processus de calcul : application du cadre théorique ci-dessus pour effectuer des simulations du taux d'actualisation à l'horizon 2070

³⁴ Autre remarque : on peut montrer que la valeur absolue du moment non centré mb_n diminue lorsque n augmente de 1 à α ; puis augmente lorsque n augmente indéfiniment, et la valeur absolue de mb_n augmente et tend vers l'infini.

Rappels

Le rapport d'Émile Quinet (septembre 2013) susmentionné préconisait pour le taux d'actualisation des investissements publics les valeurs suivantes :

$$\rho = 2,5 \% + \beta * 2 \% \text{ jusqu'en 2070} \quad (301.1)$$

$$\text{et } \rho = 1,5 \% + \beta * 3 \% \text{ au-delà} \quad (301.2)$$

en fonction de l'élasticité β des avantages nets annuels du projet par rapport au PIB réel par tête.

Le Comité d'experts mène une réflexion pour actualiser ces préconisations du rapport Quinet sur le risque et les taux d'actualisation. Le cadre théorique présenté au §1.1 ci-dessus offre un moyen pour contribuer à cette réflexion, à un horizon³⁵ allant au-delà de la conjoncture mais restant en deçà du long terme.

2.1. Paramétrage

Horizon temporel 2070

Le Comité d'experts a approuvé le 10 octobre 2017 le Complément A1 « Le paramétrage du scénario de référence », adoptant le taux de croissance anticipé du scénario moyen-bas du COR alors en vigueur.

De nouveaux scénarios du COR, à horizon 2070, étant disponibles depuis le 26 novembre 2020, il paraît approprié de s'y référer notamment en adoptant le même horizon temporel, 2070. Au-delà, le cadre analytique devra être complété.

Le paramètres du programme de simulation numérique

Les formules analytiques ci-dessus dépendent des 7 paramètres suivants :

- fonction d'utilité : δ, γ
- évolutions anticipées du PIB réel par tête (scénario de référence) : k_1, k_2
- loi de probabilité « de Pareto » des désastres rares : p, ε_0, α

La démarche ici proposée consiste à adopter des valeurs de départ de ces paramètres pour calculer une variante 0, puis à calculer d'autres variantes en modifiant la valeur de tel ou tel paramètre.

Paramètre δ (préférence pour le présent).

Le tableau 1 ci-après rassemble des références pour la valeur attribuée à ce paramètre δ .

Nota 4 : on observe (voir relation (230)) que δ intervient seulement dans le calcul final du taux d'actualisation $\rho_{a+b}(\beta)$ et que son effet est purement additif.

Les calculs du taux d'actualisation peuvent donc être effectués en supposant provisoirement que $\delta = 0$, puis en ajoutant en bout de course la valeur de δ qui sera jugée appropriée. (302)

Paramètre γ (aversion au risque).

Le tableau 1 ci-après rassemble des références pour la valeur attribuée à ce paramètre γ . Le Rapport Gollier et le Rapport Quinet adoptent l'un et l'autre la valeur $\gamma = 2$, qui était déjà celle du Rapport Lebègue. On partira donc dans la variante 0 de cette valeur $\gamma = 2$ (303)

On examinera ensuite des valeurs alternatives.

³⁵ En fait, horizon auquel il est acceptable de postuler que les variables annuelles z_t sont *iid*.

	δ	γ
	Préférence pour le présent	Aversion au risque
	% par an	sans dimension
Cline (1992)	0	1,5
Arrow (1999)	0	2
Rapport Lebègue (2005)	1	2
Stern (2007)	0,1	1
Arrow (2007)		2 à 3
Dasgupta (2007)		2 à 4
Weitzman (2007)	2	2
Nordhaus (2008)	1,5	2
Barro (2006, 2011)	3	2,75 à 4,33
Gollier (2011)		2
Martin (2010)	3	
Pindyck (2013)		1 à 3
Rapport Quinet E (2013)	1	2
Green Book (UK) (2018)	0,5 +1	1

Evolutions anticipées du PIB réel par tête (scénario de référence)

On considère (voir (119)) la variable aléatoire $z_t = \ln(Y_t/Y_{t-1})$, Y_t étant le PIB réel par tête de l'année t .

Paramètre³⁶ k_1

C'est l'espérance mathématique de z à l'horizon 2070, par rapport à l'année 2019.

Source : scénarios 2020 du COR précités. Le tableau 2 présente les résultats de ces scénarios.

Tableau 2 : 2070/2019

N°	Type	k_1	Ecart-type	Variance
1	Sc 1,8 / 4,5	1,6103%	1,98%	0,039%
2	Sc 1,8 / 7	1,5581%	1,97%	0,039%
3	Sc 1,5 / 7	1,3146%	1,95%	0,038%
4	Sc 1,3 / 7	1,1524%	1,94%	0,038%
5	Sc 1,0 / 7	0,9084%	1,94%	0,037%
6	Sc 1,0 / 10,0	0,8440%	1,93%	0,037%

Calculs de Ni Jincheng

Conformément à la décision précitée du Comité d'experts, il y a lieu de retenir la scénario moyen-bas (n°4) du COR, c'est -à dire la valeur $k_1=1,1524\%$ (304)

Paramètre³⁷ k_2

C'est la variance de z à l'horizon 2070, par rapport à l'année 2019. Le tableau 2 indique les variances relatives aux scénarios 2020 du COR. Ces valeurs sont très faibles : 0,038% pour le scénario moyen-bas, par exemple. Ce résultat est lié au fait que le modèle macroéconomique utilisé pour les projections a été estimé sur une période remontant aux années 1980.

Le Comité d'experts a cherché des sources statistiques remontant plus loin dans le temps et il a pu s'appuyer sur la série longue de 1820 à 2016 du PIB par tête de la France, en parité de pouvoir d'achat

³⁶ Aussi couramment notée μ

³⁷ Aussi couramment notée σ^2

(*ppa*), établies par Cette G. et *alii*, Banque de France. Cette série a fait l'objet de différents travaux³⁸. Le tableau 3 ci-dessous présente en particulier les valeurs de la variance k_2 , observées en prenant toujours 2016 pour année terminale mais en prenant pour année de début successivement 1820, 1900, 1913 (avant la première guerre mondiale), 1939 (avant la deuxième guerre mondiale), 1947 (départ des « trente glorieuses »), 1973 (juste avant le premier choc pétrolier).

Tableau 3

Période	Variance k_2
2016/1820	0,374%
2016/1900	0,445%
2016/1913	0,475%
2016/1939	0,391%
2016/1947	0,052%
2016/1973	0,023%

Sur l'ensemble de la période historique considérée, la valeur de la variance k_2 observée est ainsi de 0,374%, Cette valeur augmente ensuite et culmine à 0,475 % pour la période commençant en 2013, à la veille de la première guerre mondiale. Elle décroît ensuite très fortement au lendemain de la deuxième guerre mondiale.

Dans quelle mesure la valeur de la variance k_2 qu'il s'agit d'anticiper à l'horizon 2070 peut-elle s'inspirer des valeurs de k_2 observées sur la période historique ? Pour alimenter les réflexions du Comité d'experts, on adoptera ci-après dans la variante 0 :

$$\text{la valeur } k_2 = \mathbf{0,374} \% \text{ (relative à la série longue tout entière)} \quad (305)$$

On pourra ensuite examiner des variantes pour d'autres valeurs de k_2 .

Paramètres de la loi de probabilité « de Pareto » des désastres rares : p, ε_0, α

La fonction de répartition de la série historique de la variable z_t a fait l'objet d'études statistiques³⁹, dont il ressort notamment : que cette distribution empirique n'est pas purement gaussienne⁴⁰, qu'il existe des queues épaisses, et que c'est une loi de Pareto qui s'ajuste le mieux⁴¹ aux observations des taux d'évolution du PIB par tête d'un côté fortement négatifs ou, de l'autre côté, fortement positifs. Cependant les paramètres de la loi de probabilité gaussienne pour la partie centrale et ceux des lois de Pareto pour les queues épaisses n'ont pas pu être déterminés par une estimation simultanée utilisant la méthode du maximum de vraisemblance. Une telle estimation est rendue difficile par le faible effectif des désastres (et rebonds) rares.

C'est pourquoi, « faute de mieux » à ce stade, il est proposé ici d'utiliser les paramètres obtenus par Barro (2011), qui a appliqué ladite méthode à un échantillon de désastres rares obtenu en rassemblant les données couvrant une période de 100 dans 36 pays. Pour le cas, retenu ici, d'une loi de Pareto unique, les valeurs de ces paramètres sont les suivantes⁴² :

³⁸ Voir notamment : Grimaud Victoria (2018) « La prise en compte du risque dans les projets d'investissement public », rapport de stage coordonné par Ni Jincheng ; Marhraoui Asmaé (2019) « Rapport final : synthèse des travaux réalisés dans le cadre du projet : la prise en compte du risque systémique dans le taux d'actualisation pour l'évaluation socioéconomique des investissements publics », rapport de stage coordonné par Ni Jincheng.

³⁹ Rapport précité d'Asmaé Marhraoui, coordonné par Ni Jincheng. Afin d'assurer la comparabilité avec les séries similaires élaborées par Cette et *alii* (jam cit.) pour d'autres pays, la période couverte par ces estimations est 2016/1851.

⁴⁰ Rapport susmentionné, page 16 à 20.

⁴¹ Rapport susmentionné, pages 34 et 39.

⁴² Barro (2011), jam cit. Page 23. "single power law ; GDP data".

$$p = 0,0383 ; \varepsilon_0 = 0,10 ; \alpha = 6,86 \quad (306)$$

2.2. La variante 0 (notice du programme de simulation, effectué sur Excel⁴³)

On procède en deux étapes :

- la tabulation des valeurs numériques « exactes » du taux d'actualisation et de ses composantes, en donnant à β des valeurs successives, allant par exemple de -1 à +2 ;
- la recherche de formules simples - notamment d'un taux d'actualisation fonction de degré 1 en β , analogue à la formule (301.1) – comportant les écarts « les plus petits possible » par rapport aux valeurs tabulées.

La fiche « Variante 0 » jointe à la présente Note justificative présente *in extenso* les simulations numériques (feuilles Excel « Calculs » et « Figures »). Le processus est décrit ci-après.

Etape 1 : tabulation

Récapitulation : pour simuler la variante 0 on utilise les valeurs suivantes des paramètres

$$\delta = 0 ; \gamma = 2 ; k_1 = 1,1524 \% ; k_2 = 0,374 \% ; p = 0,0383 ; \varepsilon_0 = 0,1 ; \alpha = 6,86 \quad (307)$$

On considère les valeurs suivantes de la variable β (308)

β	-1,0	-0,5	0,0	0,5	1,0	1,5	2,0
---------	------	------	-----	-----	-----	-----	-----

Les opérations sont effectuées dans l'ordre suivant.

Etape 1.1 : on considère le cas très schématique où la variable z serait « purement gaussienne » : z_{pg} , de moyenne k_1 et de variance k_2 . Ce cas sert de repère pour mettre en évidence l'impact de la décomposition de la variable z en deux variables aléatoires indépendantes z_a gaussienne et z_b « de Pareto », examinées ensuite.

On tabule $\tau pg(\beta)$, $\nu pg(\beta)$ et $\rho pg(\beta)$ (pour $\delta = 0$), appelés dans le fichier tau pg, nu pg et rho pg. Les formules utilisées sont les suivantes :

$$\tau pg(\beta) = -[(\beta - \gamma) \cdot k_1 + \frac{(\beta - \gamma)^2}{2} \cdot k_2] \quad (308.1)$$

$$\nu pg(\beta) = \beta \cdot k_1 + \frac{\beta^2}{2} \cdot k_2 \quad (308.2)$$

$$\rho pg(\beta) \text{ (pour } \delta = 0) = \tau pg(\beta) + \nu pg(\beta) = (\gamma \cdot k_1 - \frac{\gamma^2}{2} \cdot k_2) + \beta \cdot (\gamma \cdot k_2) \quad (308.3)$$

La figure F1 en donne la représentation graphique.

Etape 1.2 : on considère la composante z_b relative aux désastres rares, censée suivre la loi « de Pareto » précitée.

On tabule $\tau b(\beta)$, $\nu b(\beta)$ et $\rho b(\beta)$, appelés dans le fichier tau b, nu b et rho b. Les formules utilisées sont les suivantes :

$$\tau b(\beta) = -\ln(1 - p + p \cdot \frac{\alpha}{\beta - \gamma + \alpha} \cdot e^{(\beta - \gamma) \cdot (-\varepsilon_0)}) \quad (\text{voir 229.1})$$

$$\nu b(\beta) = \ln(1 - p + p \cdot \frac{\alpha}{\beta + \alpha} \cdot e^{\beta \cdot (-\varepsilon_0)}) \quad (\text{voir 229.2})$$

Pour la prise en compte d'une loi de Pareto « double puissance », voir les travaux susmentionnés de Michel Massoni.

⁴³ Le fichier Excel du programme de calcul correspondant est mis à disposition et je reste disponible pour toute précision sur son contenu ou sur son mode d'emploi.

$$\rho b(\beta) = \tau b(\beta) + \nu b(\beta) \quad (\text{voir 229.3})$$

La figure F2 en donne la représentation graphique.

Nota 5 : la courbe de $\rho b(\beta)$ est très non-linéaire ; elle a l'allure d'une branche hyperbolique, négative, croissante, tournant sa concavité vers le bas ; on peut montrer qu'elle admet une asymptote verticale à gauche pour $\beta = -\alpha + \gamma$ et qu'elle admet l'axe horizontal pour asymptote vers le haut.

On calcule aussi les cumulants de zb :

$$\text{sa moyenne est : } kb_1 = -\left(\varepsilon_0 + \frac{1}{\alpha}\right) \cdot p \quad (\text{voir 227.1 et 225.1})$$

$$\text{sa variance : } kb_2 = \left(\varepsilon_0^2 + 2 \cdot \frac{\varepsilon_0}{\alpha} + 2 \cdot \frac{1}{\alpha^2}\right) \cdot p - kb_1^2 \quad (\text{voir 227.2 et 225.2})$$

Etape 1.3 : on considère ensuite la composante za supposée gaussienne.

On calcule les cumulants correspondants : sa moyenne est $ka_1 = k_1 - kb_1$ et sa variance est $ka_2 = k_2 - kb_2$.

On tabule $\tau a(\beta)$, $\nu a(\beta)$ et $\rho a(\beta)$, appelés dans le fichier tau a, nu a et rho a. Les formules utilisées sont les suivantes :

$$\tau a(\beta) = -\left[(\beta - \gamma) \cdot ka_1 + \frac{(\beta - \gamma)^2}{2} \cdot ka_2\right] \quad (\text{voir 228.1})$$

$$\nu a(\beta) = \beta \cdot ka_1 + \frac{\beta^2}{2} \cdot ka_2 \quad (\text{voir 228.2})$$

$$\rho a(\beta) = \tau a(\beta) + \nu a(\beta) = \left(\gamma \cdot ka_1 - \frac{\gamma^2}{2} \cdot ka_2\right) + \beta \cdot (\gamma \cdot ka_2) \quad (\text{voir 228.3})$$

La figure F3 en donne la représentation graphique.

Rappel, Nota 3 : $\rho a(\beta)$ est ainsi donnée par la relation standard, fonction de degré 1 en β (« linéaire ») $\tau a(\beta)$ et $\nu a(\beta)$ sont deux fonctions de degré 2 en β (ou « paraboliques »).

Etape 1.4 : on considère enfin la variable $z_{a+b} = za + zb$, somme des deux variables indépendantes za et zb .

On tabule $\tau_{a+b}(\beta)$, $\nu_{a+b}(\beta)$ et $\rho_{a+b}(\beta)$ (pour $\delta = 0$), appelés dans le fichier tau a+b, nu a+b et rho a+b. Les formules utilisées sont les suivantes :

$$\tau_{a+b}(\beta) = \tau a(\beta) + \tau b(\beta) \quad (\text{voir 214.1})$$

$$\nu_{a+b}(\beta) = \nu a(\beta) + \nu b(\beta) \quad (\text{voir 214.2})$$

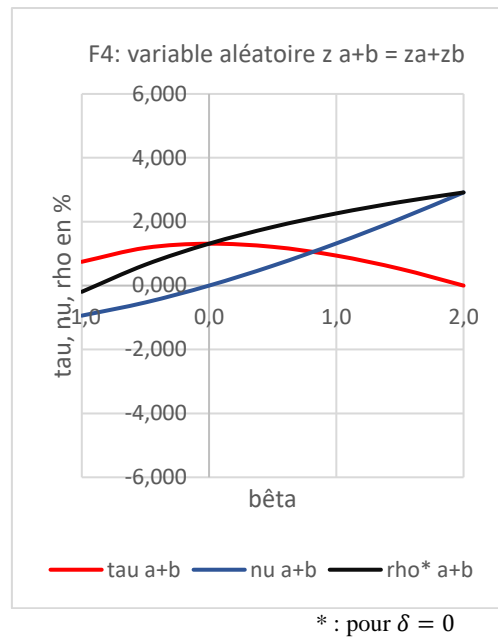
$$\rho_{a+b}(\beta) (\text{pour } \delta = 0) = \rho a(\beta) + \rho b(\beta) \quad (\text{voir 214.3})$$

La figure F4 en donne la représentation graphique.

Les résultats de la tabulation sont les suivants :

$$z = z_a + z_b$$

β	-1,0	-0,5	0,0	0,5	1,0	1,5	2,0
τ_{a+b}	0,746	1,182	1,312	1,214	0,940	0,526	0,000
ν_{a+b}	-0,940	-0,526	0,000	0,620	1,320	2,088	2,916
ρ_{a+b} pour $\delta = 0$	-0,194	0,655	1,312	1,834	2,260	2,615	2,916



Nota 6 :

Courbe représentative de la fonction $\tau_{a+b}(\beta)$: d'abord croissante, elle passe par un maximum puis décroît et pour $\beta = \gamma$, elle coupe l'axe horizontal (voir relation (134)). Elle tourne sa concavité vers le bas.

Courbe représentative de la fonction $\nu_{a+b}(\beta)$: elle est croissante et pour $\beta = 0$ elle coupe l'axe horizontal (voir relation (132)) ; elle tourne sa concavité vers le haut.

Courbe représentative de la fonction $\rho_{a+b}(\beta)$, c'est-à-dire du taux d'actualisation pour $\delta = 0$: elle est croissante mais non linéaire : elle tourne sa concavité vers le bas.

Nota 7 : la tabulation pourrait aisément être étendue à toute autre plage de valeur de β (pourvu que $\beta > -\alpha + \gamma$) et à tout granularité positive de β inférieure au pas de 0,5 retenu ci-dessus.

Etape 2 : approximations

Cependant la tabulation comporte un grand nombre d'informations dont il n'est pas aisé de dégager les grandes lignes et dont l'usage est peu « convivial ». On peut dès lors chercher à « approcher » les valeurs tabulées par des formules simples de polynômes en β , et notamment par une formule du taux d'actualisation en tant que polynôme de degré 1 en β .

Mais toute approximation introduit fatalement des écarts par rapport aux valeurs numériques « exactes » de la tabulation. Ces écarts suscitent à leur tour des erreurs sur l'estimation de la VAN SE.

On est ainsi conduit à chercher pour la forme polynômiale simple postulée les valeurs des coefficients qui minimisent les erreurs affectant la VAN SE.

En remontant alors à la définition fondamentale de la VAN SE (voir ci-dessus relations (104) et (129)), minimiser l'erreur sur VAN SE requiert de minimiser l'erreur sur $\tau_{a+b}(\beta)$.

Pour les valeurs de β allant de -1 à +2, la fonction $\tau_{a+b}(\beta)$ tabulée montrant une forte concavité, la forme polynômiale simple susceptible de l'approcher ne peut être ni une constante, ni un polynôme de degré 1 en β , mais un polynôme au moins de degré 2 en β : approximation, dite ci-après « parabolique ».

Une fois connue la « meilleure approximation parabolique de $\tau_{a+b}(\beta)$ », (qui correspond avec « la meilleure approximation de la VAN SE »), on cherchera ensuite la meilleure approximation de $\nu_{a+b}(\beta)$ de façon à aboutir à la meilleure approximation linéaire de $\rho_{a+b}(\beta)$.

Les étapes successives du processus d'approximation sont les suivantes.

Etape 2.1. Approximation parabolique $\tau p(\beta)$ de $\tau_{a+b}(\beta)$

On a établi plus haut (voir (134)) que pour $\beta = \gamma$, alors $\tau_{a+b}(\gamma) = 0$. On souhaite maintenir cette condition de cohérence théorique. La forme parabolique proposée « *a priori* » s'écrit dès lors :

$$\begin{aligned} \tau p(\beta) &= -[u \cdot (\beta - \gamma) + w \cdot \frac{(\beta - \gamma)^2}{2}], \text{ que nous écrivons :} \\ \tau p(\beta) &= -[u \cdot (\beta - \gamma) + \frac{w}{2} (\beta - \gamma)^2] \end{aligned} \quad (309)$$

Soit à déterminer les coefficients⁴⁴ u et $w/2$, par la méthode des moindres carrés.

On considère la somme des carrés des écarts :

$$S = \sum_{\beta=-1}^{\beta=+2} [\tau_{a+b}(\beta) + u \cdot (\beta - \gamma) + \frac{w}{2} (\beta - \gamma)^2]^2 \quad (310)$$

On cherche u et $(w/2)$ qui minimisent S . Pour cela, on annule les deux dérivées partielles :

$$\frac{\partial S}{\partial u} = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot \sum_{\beta=-1}^{\beta=+2} (\beta - \gamma) \cdot [\tau_{a+b}(\beta) + u \cdot (\beta - \gamma) + \frac{w}{2} (\beta - \gamma)^2] = 0 \quad (311.1)$$

$$\frac{\partial S}{\partial (\frac{w}{2})} = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot \sum_{\beta=-1}^{\beta=+2} (\beta - \gamma)^2 \cdot [\tau_{a+b}(\beta) + u \cdot (\beta - \gamma) + \frac{w}{2} (\beta - \gamma)^2] = 0 \quad (311.2)$$

Processus de calcul (voir fiche Excel « Variante 0 »)

Posons :

$$\begin{aligned} A &= \sum_{\beta=-1}^{\beta=+2} (\beta - \gamma)^2 ; & B &= \sum_{\beta=-1}^{\beta=+2} (\beta - \gamma)^3 ; & C &= \sum_{\beta=-1}^{\beta=+2} (\beta - \gamma)^4 \\ U &= -\sum_{\beta=-1}^{\beta=+2} \tau_{a+b}(\beta) \cdot (\beta - \gamma) ; & V &= -\sum_{\beta=-1}^{\beta=+2} \tau_{a+b}(\beta) \cdot (\beta - \gamma)^2 \end{aligned}$$

$$(311.1) \text{ s'écrit : } \quad A \cdot u + B \cdot (w/2) = U \quad (312.1)$$

$$(311.2) \text{ s'écrit : } \quad B \cdot u + C \cdot (w/2) = V \quad (312.2)$$

Solution du système de ces deux équations linéaires à deux inconnues :

$$\Delta = A \cdot C - B^2 \quad (313.0)$$

$$u = (C \cdot U - B \cdot V) / \Delta \quad (313.1)$$

$$w/2 = (A \cdot V - B \cdot U) / \Delta \quad (313.2)$$

$$\text{Résultat (voir fiche Variante 0) : } \mathbf{u = 1,353} \text{ et } w/2 = 0,362 \text{ donc}^{45} \mathbf{w = 0,723} \quad (313.4)$$

Adoptons comme critère de précision de l'approximation la racine carrée de l'erreur quadratique moyenne⁴⁶ : $rceqm = \sqrt{(S/7)}$. On obtient : $rceqm \tau = 0,048 \%$. (313.5)

Représentation graphique, pour β allant de -1 à +2. : voir figure F5 ci-dessous (extraite de la fiche Excel « Variante 0 »)

Nota 8 :

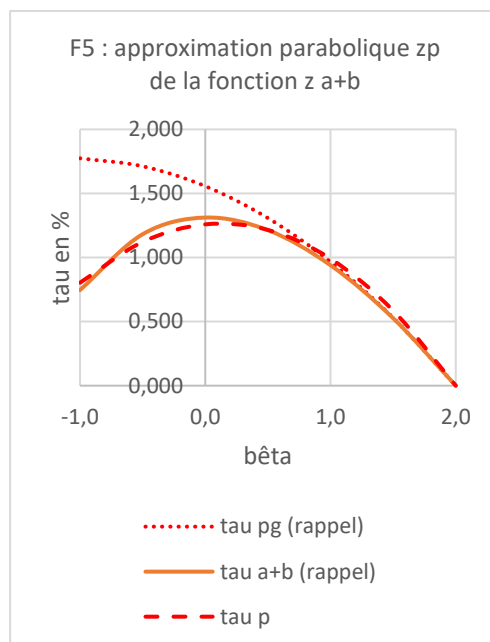
- La courbe « parabolique » $\tau p(\beta)$ apparaît comme une approximation convenable de la courbe représentative de la fonction analytique (tabulée ci-dessus) $\tau_{a+b}(\beta)$ sur la plage de β allant de +1 à +2.

⁴⁴ La notation w , utilisée de préférence à v qui se distingue mal de la lettre grecque ν , ne doit pas être confondue avec le scalaire w utilisé plus haut aux relations (202) et suivantes.

⁴⁵ Compte tenu des arrondis.

⁴⁶ 7 est le nombre de valeurs de β considérées, allant de - à +2.

- Ces deux courbes se distinguent nettement de la courbe $(\tau p g(\beta))$ « purement gaussienne », dans laquelle il est fait abstraction des désastres rares. La prise en compte des désastres rares induit une réduction du « taux global d'actualisation » τ d'autant plus forte que β est plus fortement inférieur à γ et notamment que le projet est plus contracyclique ($\beta < 0$, de valeur absolue croissante).



Nota 9 : La formule (309) ci-dessus adoptée pour $\tau p(\beta)$ se transcrit sous la forme du polynôme suivant d'ordre 2 de β :

$$\tau p(\beta) = \left(u \cdot \gamma - w \cdot \frac{\gamma^2}{2} \right) + (u - w \cdot \gamma) \cdot \beta + w \cdot \frac{\beta^2}{2} \quad (314)$$

Etape 2.2. Répartition de l'approximation de $\tau p(\beta)$ entre $\rho p(\beta)$ et $\nu p(\beta)$

Les approximations recherchées $\rho p(\beta)$ et $\nu p(\beta)$ doivent remplir la relation de cohérence (voir relation (131)) :

$$\rho p(\beta) = \delta + \tau p(\beta) + \nu p(\beta) \quad (315.1)$$

On suppose provisoirement $\delta = 0$. La relation de cohérence (315.1) peut alors s'écrire :

$$\rho p(\beta) - \nu p(\beta) = \tau p(\beta) \quad (315.2)$$

c'est-à-dire, compte tenu de (314) :

$$\rho p(\beta) - \nu p(\beta) = \left(u \cdot \gamma - w \cdot \frac{\gamma^2}{2} \right) - (u - w \cdot \gamma) \cdot \beta - w \cdot \frac{\beta^2}{2} \quad (315.3)$$

Quelle forme pour le taux d'actualisation $\rho p(\beta)$?

On souhaite adopter pour le taux d'actualisation $\rho p(\beta)$ un polynôme de degré 1 en β , noté :

$$\rho p(\beta) = r f p + \phi p \cdot \beta \quad (316)$$

Quelle forme pour le polynôme $\nu p(\beta)$?

En reportant cette hypothèse (316) dans la relation (315.3), il apparaît que le polynôme $\nu p(\beta)$ doit être de la forme :

$$vp(\beta) = [rfp + \phi p \cdot \beta] - \left[(u \cdot \gamma - w \cdot \frac{\gamma^2}{2}) - (u - w \cdot \gamma) \cdot \beta - w \cdot \frac{\beta^2}{2} \right], \text{ qui peut s'écrire :}$$

$$vp(\beta) = \left[rfp - \left(u \cdot \gamma - w \cdot \frac{\gamma^2}{2} \right) \right] + [\phi p + (u - w \cdot \gamma)] \cdot \beta + w \cdot \frac{\beta^2}{2} \quad (317)$$

Le polynôme $vp(\beta)$ est donc nécessairement « parabolique », son terme de degré 2 en β est nécessairement égal à $w \cdot \frac{\beta^2}{2}$. (318)

Il paraît ici souhaitable que le polynôme recherché $vp(\beta)$ soit cohérent avec les propriétés analytiques de la fonction $v_{a+b}(\beta)$.

Ainsi, comme établi en (132), la fonction v s'annule pour $\beta = 0$. Cette condition requiert d'après (317) :

$$rfp - \left(u \cdot \gamma - w \cdot \frac{\gamma^2}{2} \right) = 0, \text{ autrement-dit : } rfp = \left(u \cdot \gamma - w \cdot \frac{\gamma^2}{2} \right) \quad (319)$$

En outre, on peut montrer que pour $\beta = 0$, la dérivée est telle que : $\left[\frac{dv(\beta)}{d\beta} \right]_{\beta=0} = k_1$ (320)

Preuve

$$\text{Voir (130) : } v(\beta) = \ln Ee^{\beta \cdot z}. \text{ Donc : } \frac{dv(\beta)}{d\beta} = \frac{d(Ee^{\beta \cdot z})/d\beta}{Ee^{\beta \cdot z}} = \frac{E(z \cdot e^{\beta \cdot z})}{Ee^{\beta \cdot z}} \quad (320.1)$$

$$\text{La relation (320.1) se transcrit pour la variable } za : \frac{dva(\beta)}{d\beta} = \frac{d(Ee^{\beta \cdot za})/d\beta}{Ee^{\beta \cdot za}} = \frac{E(za \cdot e^{\beta \cdot za})}{Ee^{\beta \cdot za}}$$

Lorsque β tend vers 0, alors $Ee^{\beta \cdot za}$ tend vers 1 et $E(za \cdot e^{\beta \cdot za})$ tend vers Eza , qui n'est autre que l'espérance mathématique de za , notée ka_1 . On a donc :

$$\left[\frac{dva(\beta)}{d\beta} \right]_{\beta=0} = ka_1 \quad (320.2)$$

De même la relation (320.1) se transcrit pour la variable zb et l'on a :

$$\left[\frac{dvb(\beta)}{d\beta} \right]_{\beta=0} = kb_1 \quad (320.3)$$

La variable z étant la somme des variables indépendantes za et zb :

$$\left[\frac{dv_{a+b}(\beta)}{d\beta} \right]_{\beta=0} = \left[\frac{dva(\beta)}{d\beta} \right]_{\beta=0} + \left[\frac{dvb(\beta)}{d\beta} \right]_{\beta=0} = ka_1 + kb_1 = k_1 \quad (320.4)$$

La condition de cohérence (320) requiert alors :

$$\phi p + (u - w \cdot \gamma) = k_1, \text{ autrement-dit : } \phi p = k_1 - (u - w \cdot \gamma) \quad (321)$$

Résultats numériques pour la Variante 0

Rappel des valeurs numériques (313.4) : $u = 1,353$ et $w = 0,723$

$$\text{La relation (319) donne alors : } rfp = \mathbf{1,259} \quad (322.1)$$

$$\text{Et la relation (321) donne : } \phi p = \mathbf{1,246} \quad (322.2)$$

La formule simple linéaire relative au taux d'actualisation et la formule associée, relative au calcul de l'espérance mathématique de l'avantage annuel net du projet, sont dès lors :

$$\rho p(\beta) = \delta + \mathbf{1,259} + \beta \cdot \mathbf{1,246} \quad (323.1)$$

$$vp(\beta) = \beta \cdot \mathbf{1,1524} + \frac{\beta^2}{2} \mathbf{0,723} \quad (323.2)$$

Représentation graphique, pour β allant de -1 à +2, et erreurs moyennes.

Les deux figures (extraites de la fiche Excel « Variante 0 ») représentent les évolutions de la fonction polynômiale approchée, au regard de la fonction « analytique » (qui a été tabulée) et de l'hypothèse-repère « purement gaussienne ».

Figure F7 relative au taux d'actualisation : la droite d'équation $\rho p(\beta)$ est plus pentue que la droite-repère « purement gaussienne » d'équation $\rho pg(\beta)$. Sa proximité par rapport à la courbe analytique

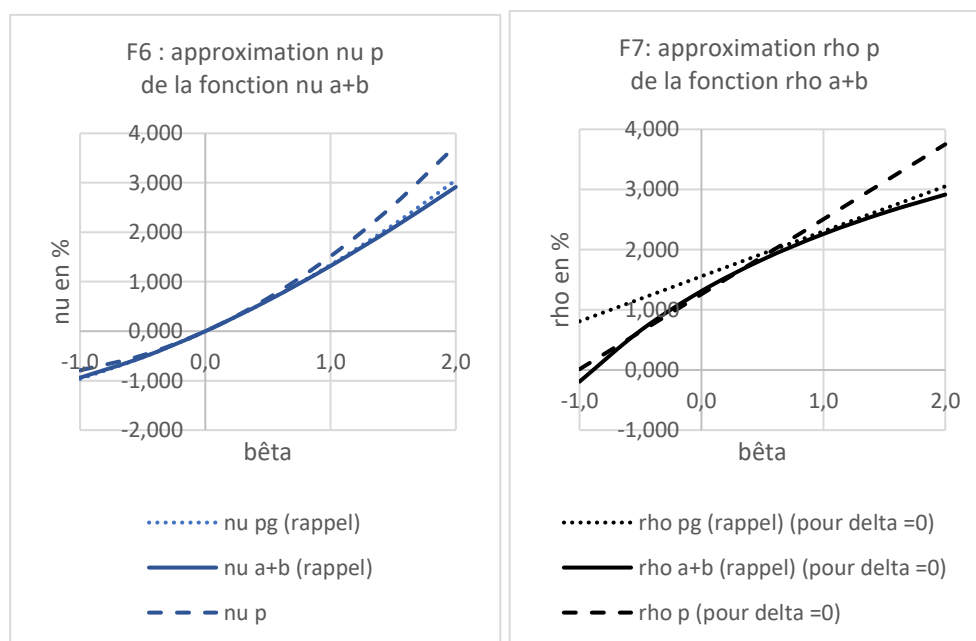
d'équation $\rho_{a+b}(\beta)$ est meilleure dans la partie gauche que dans la partie droite du graphique⁴⁷. La racine carrée de l'erreur quadratique moyenne vaut :

$$rceqm \rho = 0,372 \% \quad (324.1)$$

Figure F6 relative à l'espérance mathématique de l'avantage annuel net du projet : la « parabole » d'équation $vp(\beta)$ est plus convexe que la courbe-repère « purement gaussienne » d'équation $vp_g(\beta)$. Sa proximité par rapport à la courbe analytique d'équation $v_{a+b}(\beta)$ est meilleure dans la partie gauche que dans la partie droite du graphique. La racine carrée de l'erreur quadratique moyenne vaut :

$$rceqm v = 0,391 \% \quad (324.2)$$

Ces deux $rceqm$ apparaissent nettement plus fortes que $rceqm \tau = 0,048 \%$ donné en (313.5), lequel reflète le taux d'erreur sur la VAN SE. Dans l'estimation de la VAN SE en appliquant les formules (323.1) et (323.2), à condition de les utiliser ensemble, les erreurs sur ces deux termes se compenseraient donc en partie. La VAN SE ainsi calculée resterait toutefois moins précise que celle qui serait calculée en utilisant les valeurs tabulées.



Comparaison⁴⁸ du taux d'actualisation approché de la Variante V0 avec le Rapport Quinet (2013)

Rappel : le Rapport Quinet (2013) recommandait d'utiliser à l'horizon 2070 le taux d'actualisation suivant : $\rho = 2,5 \% + \beta * 2 \%$ jusqu'en 2070 (voir 301.1)

La Variante 0 aboutit pour le taux d'actualisation linéarisé à la relation précitée (exprimées en %) : $\rho_{fp}(\beta) = \delta + 1,259 + \beta * 1,246$ (voir 323.1)

L'écart entre la Variante 0 et le Rapport Quinet est ainsi :

$$- \text{ sur le terme constant, dit « taux sans risque » : } \delta + 1,259 - 2,5 = \delta - 1,241 \quad (325.1)$$

⁴⁷ Au lieu de la droite $\rho p(\beta)$, Barro considère la corde qui passe par les deux points d'abscisses 0 et 1 sur la courbe analytique d'équation $\rho_{a+b}(\beta)$. On peut voir que les erreurs par rapport au taux analytique sont alors plus fortes dans la partie gauche que dans la partie droite du graphique. Barro ignore par ailleurs les effets qui s'exercent sur l'espérance mathématique des avantages annuels nets du projet, que nous ne pouvons ignorer car ils interviennent dans le calcul de la VAN SE.

⁴⁸ La comparaison de peut être faite pour la fonction approchée $vp(\beta)$ car cette fonction n'est pas traitée dans le Rapport Quinet.

- sur la coefficient de β , dit « prime de risque » : $1,246 - 2 = -0,754$ (325.2)

Selon la version approchée de la Variante 0 :

- le « taux sans risque » r_{fp} serait inférieur à **2,5** tant que la préférence pour le présent δ est inférieure à 1,241 ;
- la « prime de risque » ϕp serait nettement inférieure à **2**.

Ces deux diminutions, et surtout la seconde, ont suscité des débats au sein du Comité d'experts et ont conduit à étudier d'autres variantes pour examiner la sensibilité des résultats notamment sur les deux coefficients d'intérêt : r_{fp} et ϕp .

2.3. Autres Variantes

Diverses Variantes ont été simulées en utilisant le même programme Excel dont on a modifié seulement les paramètres d'entrée. On va en présenter trois ; chacune fait l'objet d'une fiche spécifique complète (analogue à celle de la Variante 0) annexée à la présente Note justificative.

Le tableau synoptique qui suivra met ces trois Variantes au regard de la Variante 0. Il rappelle les hypothèses, fournit les valeurs tabulées relatives à $\rho_{a+b}(\beta)$ pour $\delta = 0$ et à $\nu_{a+b}(\beta)$, et donne les équations des approximations polynômiales relatives au taux d'actualisation $\rho p(\beta)$ ainsi qu'à la fonction associée $\nu p(\beta)$.

La variante 1 augmente la variance k_2 du scénario de référence.

Elle fait passer cette variance, qui dans la Variante 0 est de $k_2 = 0,374\%$ (période historique 2016/2/1820), à la valeur $k_2 = 0,475\%$ (voir maximum du tableau 3 ci-dessus : période 2016/1913). Les résultats des fonctions approchées sont les suivants :

$$\begin{aligned}\rho p(\beta) &= \delta + 1,057 + \beta \cdot 1,448 \\ \nu p(\beta) &= \beta \cdot 1,1524 + (\beta^2/2) \cdot 0,824\end{aligned}$$

L'impact de l'augmentation de k_2 est une diminution du « taux sans risque » et une augmentation de la « prime de risque », mais celle-ci reste sensiblement inférieure à 2.

La variante⁴⁹ 2* augmente l'aversion au risque γ .

Cette augmentation se cumule avec celle de la variance k_2 du scénario de référence, qui est déjà intégrée dans la variante 1.

Elle fait passer l'aversion au risque, qui dans la Variante 0 et dans la Variante 1 est de $\gamma = 2$, à la valeur $\gamma = 2,478$: cette valeur est celle qui se révèle nécessaire pour que la « prime de risque » s'élève à 2. Les résultats des fonctions approchées sont les suivants :

$$\begin{aligned}\rho p(\beta) &= \delta + 0,765 + \beta \cdot 2,001 \\ \nu p(\beta) &= \beta \cdot 1,1524 + (\beta^2/2) \cdot 0,934\end{aligned}$$

L'impact de cette augmentation de γ , qui élève à 2 la « prime de risque », est une nouvelle diminution du « taux sans risque ».

La variante 3 examine comment la « prime de risque » pourrait s'élever à 2 tout en maintenant l'aversion au risque à $\gamma = 2$

⁴⁹ Cette variante 2* était primitivement appelée 2bis.

Pour que la « prime de risque » atteigne 2, il faudrait majorer davantage la variance k_2 du scénario de référence, ou « durcir » les paramètres de la loi de Pareto des désastres rares.

A partir de la variante 0, en jouant sur le seul paramètre k_2 , il faudrait le porter à la valeur **0,751** et en jouant sur le seul paramètre α de la loi de Pareto, le ramener à la valeur **5,23**.

La Variante 3 présente une combinaison des deux leviers, avec les valeurs $k_2 = 0,700$ et $\alpha = 0,647$. Les résultats des fonctions approchées sont les suivants :

$$\begin{aligned} \rho p(\beta) &= \delta + 0,551 + \beta \cdot 1,999 \\ \nu p(\beta) &= \beta \cdot 1,1524 + (\beta^2/2) \cdot 1,122 \end{aligned}$$

L'impact de cette augmentation de γ , qui élève à 2 la « prime de risque », est une diminution plus sensible du « taux sans risque ».

Nota 10 : Dans les deux fonctions approchées $\rho p(\beta)$ et $\nu p(\beta)$, les coefficients de sont présentés avec trois chiffres après la virgule, mais il peut être jugé préférable de les arrondir (quitte à accepter implicitement une erreur un peu plus forte par rapport aux valeurs tabulées).

Dans son avis délibéré du 24 juin 2021, le Comité d'experts a adopté la Variante 2*, assortie du choix pour la préférence pour le présent de la valeur $\delta = 0,435\%$, et d'un arrondi des valeurs des coefficient, c'est-à-dire a recommandé d'utiliser jusqu'en 2070 les valeurs ci-dessous :

Taux d'actualisation :

$$\rho = 1,2\% + \beta * 2\%$$

Taux pour calculer l'espérance mathématique du bénéfice annuel du projet :

$$\nu = \beta * 1,15\% + \frac{\beta^2}{2} * 0,9\%$$

Tableau synoptique des variantes

Hypothèses	Variante 0		Variante 1		Variante 2*		Variante 3	
	valeur	commentaires	valeur	commentaires	valeur	commentaires	valeur	commentaires
Fonction d'utilité								
δ préférence pour le présent (en % par an)	0		0		0		0	
γ aversion au risque	2		2		2,478	2,478/2=1,24	2	
Scénario à 2070								
k1 : moyenne annuelle en %	1,1524	COR 2020 moyen-bas	1,1524		1,1524		1,1524	
k2 : variance en %	0,374	an 2016/an 1820	0,475	an 2016/an 1913	0,475	0,475/,374=1,27	0,700	0,700/0,374=1,87
Désastres rares : loi de Pareto								
p probabilité d'occurrence annuelle	0,0383	Barro 2011	0,0383		0,0383		0,0383	
ϵ_0 : minimum du taux de chute par désastre	0,1	Barro 2011	0,1		0,1		0,1	
α : élasticité de la loi de Pareto	6,86	Barro 2011	6,86		6,86		6,47	6,47/6,86=0,94

Présentation des résultats**Cumulants**

loi de Pareto , moyenne kb1

Loi de pareto , variance kb2

gaussienne, moyenne ka1

gaussienne, variance ka2

	Variante 0	Variante 1	Variante 2*	Variante 3
loi de Pareto , moyenne kb1	-0,941	-0,941	-0,941	-0,975
Loi de pareto , variance kb2	0,304	0,304	0,304	0,330
gaussienne, moyenne ka1	2,094	2,094	2,094	2,127
gaussienne, variance ka2	0,070	0,171	0,171	0,370

Tabulation

Dans la tabulation ci-dessous , rho s'entend "pour delta = 0"

Bêta	rho	Nu	rho	nu	rho	nu	rho	nu
-1,00	-0,194	-0,940	-0,598	-0,889	-1,567	-0,889	-1,702	-0,773
-0,50	0,655	-0,526	0,352	-0,514	-0,189	-0,514	-0,422	-0,485
0,00	1,312	0,000	1,110	0,000	0,883	0,000	0,616	0,000
0,50	1,834	0,620	1,733	0,633	1,747	0,633	1,492	0,661
1,00	2,260	1,320	2,260	1,371	2,465	1,371	2,253	1,480
1,50	2,615	2,088	2,716	2,202	3,078	2,202	2,932	2,446
2,00	2,916	2,916	3,118	3,118	3,612	3,118	3,549	3,549
Approximations**, pour β allant de -1 à +2	Variante 0		Variante 1		Variante 2*		Variante 3	
$\rho_p(\beta) = rf_p + \beta \cdot \varphi_p$	$\delta + 1,259 + \beta \cdot 1,246$		$\delta + 1,057 + \beta \cdot 1,448$		$\delta + 0,765 + \beta \cdot 2,001$		$\delta + 0,551 + \beta \cdot 1,999$	
$v_p(\beta) = \beta \cdot k_1 + (\beta^2/2) \cdot w$	$\beta \cdot 1,1524 + (\beta^2/2) \cdot 0,723$		$\beta \cdot 1,1524 + (\beta^2/2) \cdot 0,824$		$\beta \cdot 1,1524 + (\beta^2/2) \cdot 0,934$		$\beta \cdot 1,1524 + (\beta^2/2) \cdot 1,122$	

* Variante 2* : primitivement variante "2 bis"

** Base : approximation parabolique $\tau_p(\beta)$ de la fonction $\tau_{a+b}(\beta)$; puis, décomposition de $\tau_p(\beta)$ en $\rho_p(\beta)$ linéaire et $v_p(\beta)$ parabolique

La variante 2 initiale correspondant à $k_2=0,374$ et $\gamma=2,675$ donne les résultats suivants :

$$\rho_p(\beta) = rf_p + \beta \cdot \varphi_p = \delta + 0,913 + \beta \cdot 2,001$$

$$v_p(\beta) = \beta \cdot k_1 + (\beta^2/2) \cdot w = \beta \cdot 1,1524 + (\beta^2/2) \cdot 0,890$$